

Fizik 101-Fizik I

2013-2014

Dönme Hareketinin Dinamiği

Nurdan Demirci Sankır

Ofis: 364, Tel: 2924332

TOBB Ekonomi ve Teknoloji Üniversitesi

Fizik 101



İçerik

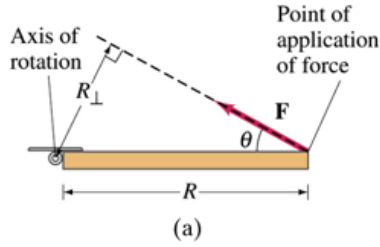
- Vektörel Çarpım ve Tork
- Katı Cismin Yuvarlanma Hareketi
- Bir Parçacığın Açısal Momentumu
- Dönen Katı Cismin Açısal Momentumu
- Açısal Momentumun Korunumu

TOBB Ekonomi ve Teknoloji Üniversitesi

Fizik 101

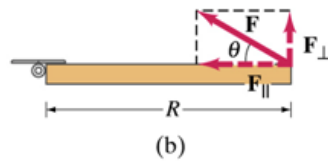


Vektörel Çarpım ve Tork



$$\tau = R_{\perp} F$$

$$\tau = R F_{\perp}$$



$$\tau = R F \sin \theta$$



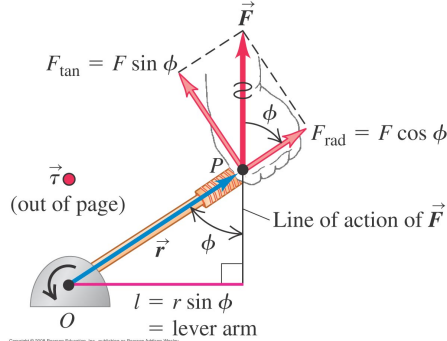
$$\vec{\tau} = \vec{R} \times \vec{F}$$



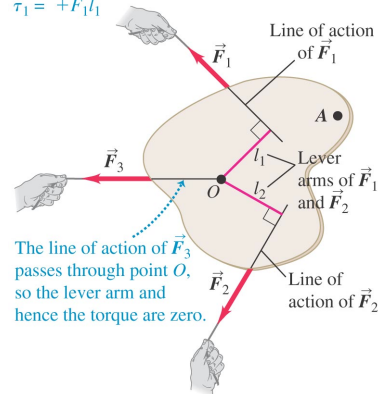
Bir noktada kuvvetin oluşturduğu tork, kuvvetin büyüklüğü ile kuvvet moment kolunun çarpımıdır

Three ways to calculate torque:

$$\tau = Fl = rF \sin \phi = F_{\tan} r$$



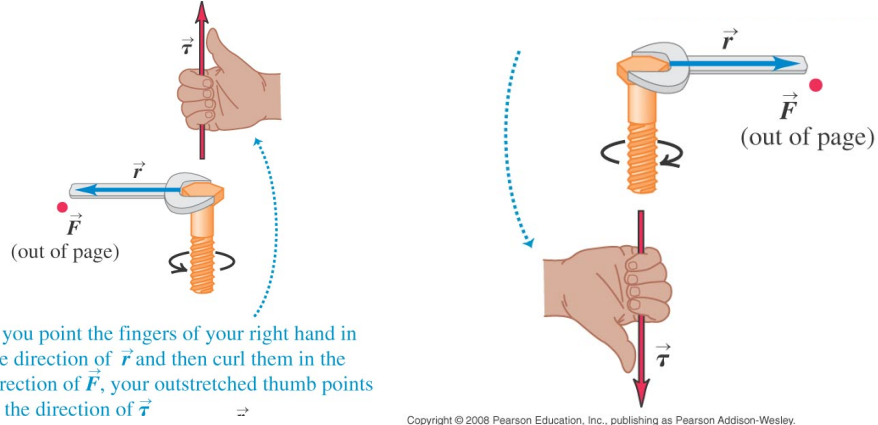
\vec{F}_1 tends to cause *counterclockwise* rotation about point O, so its torque is *positive*:
 $\tau_1 = +F_1 l_1$



\vec{F}_2 tends to cause *clockwise* rotation about point O, so its torque is *negative*: $\tau_2 = -F_2 l_2$



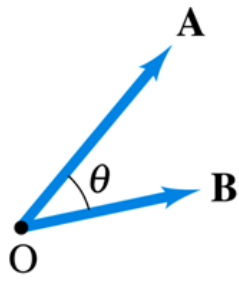
Tork bir vektördür



Copyright © 2008 Pearson Education, Inc., publishing as Pearson Addison-Wesley.



Vektörel Çarpım



$$\vec{A} \times \vec{B} = |\vec{A}| |\vec{B}| \sin \theta$$

$$\hat{i} \times \hat{i} = \hat{j} \times \hat{j} = \hat{k} \times \hat{k} = 0$$

$$\hat{i} \times \hat{j} = \hat{k} \quad \hat{j} \times \hat{k} = \hat{i} \quad \hat{k} \times \hat{i} = \hat{j}$$

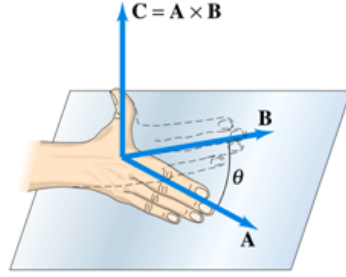
$$\vec{A} = A_x \hat{i} + A_y \hat{j} + A_z \hat{k}$$

$$\vec{B} = B_x \hat{i} + B_y \hat{j} + B_z \hat{k}$$

$$\vec{A} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix}$$



Sağ El Kuralı



$$\vec{C} = \vec{A} \times \vec{B} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \end{vmatrix}$$



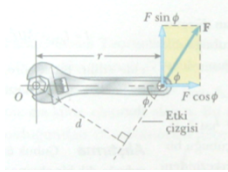
Vektörel Çarpımın Özellikleri

1. $\vec{A} \times \vec{B} = -\vec{B} \times \vec{A}$
2. Eğer \vec{A} , \vec{B} 'ye paralelse $\vec{A} \times \vec{B} = 0$ ve $\vec{A} \times \vec{A} = 0$
3. \vec{A} vektörü \vec{B} vektörüne dikse $|\vec{A} \times \vec{B}| = AB$ olur.
4. $\vec{A} \times (\vec{B} + \vec{C}) = \vec{A} \times \vec{B} + \vec{A} \times \vec{C}$
5. $\frac{d}{dt}(\vec{A} \times \vec{B}) = \vec{A} \times \frac{d\vec{B}}{dt} + \frac{d\vec{A}}{dt} \times \vec{B}$



Tork

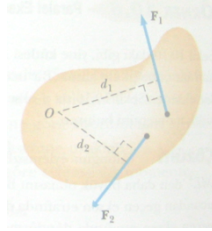
Bir kuvvetin bir cismi bir eksen etrafında döndürme eğilimi tork (τ) denilen bir nicelikle ölçülür.



$$\tau \equiv rF \sin \phi = Fd$$

r: \mathbf{F} kuvvetinin uygulama noktasından dönme eksenine olan uzaklık

d: Dönme ekseninden \mathbf{F} nin etki çizgisine olan dik uzaklık



- Dönmeye sebep olan \mathbf{F} 'nin dönme eksenine (r) dik bileşenidir ($F \sin \phi$)
- Dönme eğilimi F ve d büyüdükçe artar
- Bir cismin üzerine iki veya daha çok kuvvet uygulanırsa kuvvetlerin her birinin döndürme eğilimi vardır

$$\Sigma \tau = \tau_1 + \tau_2$$

Ref. Serway&Beicher Fen ve Mühendislik için Fizik, Palme Yayıncılık

TOBB Ekonomi ve Teknoloji Üniversitesi

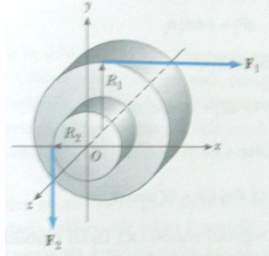
Fizik 101



Örnek

❖ Bir Silindir Üzerine Etkiyen Net Tork

Katı bir silindir sürtünmesiz bir mil etrafında serbestçe dönebilecek şekildedir. Dış yarıçapı R_1 olan silindir etrafına sarılı bir ipe, sağa yönelmiş \mathbf{F}_1 kuvveti uygulanıyor. R_2 yarıçapı üzerindeki ipe de aşağı yönelmiş \mathbf{F}_2 kuvveti uygulanıyor. a) O 'dan geçen z eksenine göre silindire etki eden net tork nedir? b) $F_1=5\text{N}$, $R_1=1,0\text{m}$, $F_2=15\text{N}$, $R_2=0,5\text{m}$ olduğunda net tork nedir?



Ref. Serway&Beicher Fen ve Mühendislik için Fizik, Palme Yayıncılık

TOBB Ekonomi ve Teknoloji Üniversitesi

Fizik 101

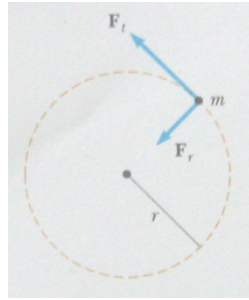


Tork ve Açısal İvme Arasındaki Bağını

F_t teğetsel ve F_r merkezci kuvveti etkisinde, r yarıçaplı bir daire etrafında dönen m kütleli bir parçacığın dairesel yörüngedeki hareketi;

$$\begin{aligned}F_t &= ma_t \\ \tau &= F_t r = (ma_t)r \\ \tau &= (mr\alpha)r = (mr^2)\alpha \\ \tau &= I\alpha\end{aligned}$$

Parçacığa etkleyen tork, açısal ivmesi ile orantılıdır



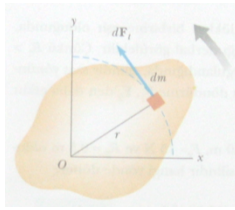
Ref. Serway&Beicher Fen ve Mühendislik için Fizik, Palme Yayıncılık

TOBB Ekonomi ve Teknoloji Üniversitesi

Fizik 101



Tork ve Açısal İvme Arasındaki Bağını



➤ Sabit bir eksen etrafında dönen katı bir cisim, çok sayıda dm kütleli küçük parçacıklardan oluşmuş gibi düşünülebilir.

➤ Her kütle elemanı orijin etrafında bir daire çevresinde döner ve teğetsel dF_t kuvvetinden kaynaklanan teğetsel bir ivmeye a_t sahiptir.

➤ Newton'un ikinci hareket kanunu;

Katı cismin her noktasının teğetsel ivmesi farklı olabildiği halde her kütle elemanı aynı açısal ivmeye sahiptir

$$dF_t = (dm)a_t$$

$$d\tau = (r dm)a_t$$

$$d\tau = (r dm)r\alpha = (r^2 dm)\alpha$$

$$\sum \tau = \int (r^2 dm)\alpha = \alpha \int r^2 dm = I\alpha$$

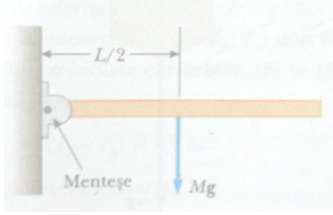
TOBB Ekonomi ve Teknoloji Üniversitesi

Fizik 101



Örnek

❖ Dönen Çubuk



Uzunluğu L , kütlesi M olan düzgün bir çubuk bir ucu etrafında sürtünmesiz dönebilmektedir. Çubuk yatay durumda iken serbest bırakılır. Çubuğun ilk açısal ivmesi nedir?

Ref. Serway&Beicher Fen ve Mühendislik için Fizik, Palme Yayıncılık

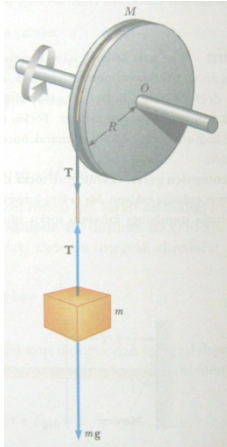
TOBB Ekonomi ve Teknoloji Üniversitesi

Fizik 101



Örnek

❖ Bir tekerleğin açısal ivmesi



Yarıçapı R , kütlesi M ve eylemsizlik momenti I olan bir tekerlek sürtünmesiz yatay bir mil üzerine monte edilmiştir. Tekerlek etrafına sarılı hafif bir ipin ucunda m kütleli bir cisim vardır. Tekerleğin açısal ivmesini, asılı cismin çizgisel ivmesini ve ipteki gerilmeyi bulunuz.

Ref. Serway&Beicher Fen ve Mühendislik için Fizik, Palme Yayıncılık

TOBB Ekonomi ve Teknoloji Üniversitesi

Fizik 101



Dönme Hareketinde İş, Güç ve Enerji

Bir F dış kuvveti, bir cisim üzerine uygulanırsa, cisim dt süresinde $ds=r d\theta$ kadar döner. F kuvvetinin yaptığı iş;

$$dW = \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = (F \sin\phi) r d\theta$$

F 'nin radyal (merkezcil) bileşeni yerdeğiştirmeye dik olduğundan iş yapmaz!

$$dW = \tau d\theta$$

$$\frac{dW}{dt} = \tau \frac{d\theta}{dt}$$



Dönme Hareketinde İş, Güç ve Enerji

Dönme hareketinde kuvvet tarafından aktarılan ani güç;

$$P = \frac{dW}{dt} = \tau \omega$$

Doğrusal harekette kuvvet tarafından aktarılan ani güç;

$$P = \frac{dW}{dt} = Fv$$

Doğrusal harekette olduğu gibi, dönme hareketinde de, dış kuvvetler tarafından bir cisim üzerinde yapılan iş dönme kinetik enerjisindeki değişime eşittir.

$$\sum W = \int_{\theta_1}^{\theta_2} \sum \tau d\theta = \int_{\omega_1}^{\omega_2} I \omega d\omega = \frac{1}{2} I \omega_2^2 - \frac{1}{2} I \omega_1^2$$



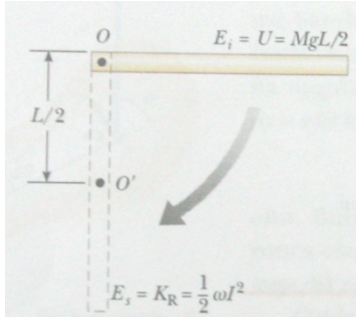
Sabit Bir Eksen Etrafında Dönme Hareketi	Öteleme Hareketi
Açısal hız $\omega = d\theta/dt$	Çizgisel hız $v = dx/dt$
Açısal ivme $\alpha = d\omega/dt$	Çizgisel ivme $a = dv/dt$
Bileşke Tork $\Sigma\tau = I\alpha$	Bileşke kuvvet $\Sigma F = ma$
$\alpha = \text{sabit ise } \begin{cases} \theta_s = \omega_i + \alpha t \\ \theta_s - \theta_i = \omega_i t + \frac{1}{2} \alpha t^2 \\ \omega_s^2 = \omega_i^2 + 2\alpha(\theta_s - \theta_i) \end{cases}$	$a = \text{sabit ise } \begin{cases} v_s = v_i + at \\ x_s - x_i = v_i t + \frac{1}{2} at^2 \\ v_s^2 = v_i^2 + 2a(x_s - x_i) \end{cases}$
İş $W = \int_{\theta_i}^{\theta_s} \tau d\theta$	İş $W = \int_{x_i}^{x_s} F_x dx$
Dönme kinetik enerji $K_D = \frac{1}{2} I\omega^2$	Kinetik enerji $K = \frac{1}{2} mv^2$
Güç $\mathcal{P} = \tau\omega$	Güç $\mathcal{P} = Fv$
Açısal momentum $L = I\omega$	Doğrusal momentum $p = mv$
Bileşke Tork $\Sigma\tau = dL/dt$	Bileşke kuvvet $\Sigma F = dp/dt$



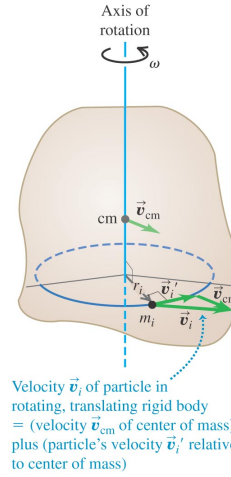
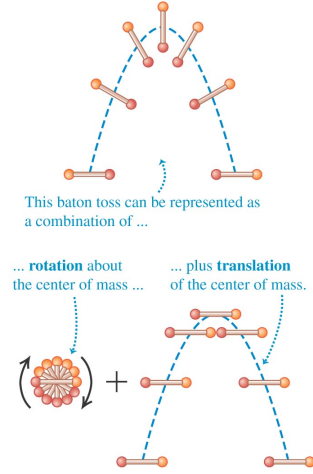
Örnek

❖ Dönen Çubuk

Boyu L ve kütlesi M olan düzgün bir çubuk bir ucu etrafında sürtünmesiz bir mil üzerinde, şekilde gösterilen yönde dönebilmektedir. Çubuk en düşük (düşey) konumda iken açısal hızı ne olur?



Katı Cismin Hareketli Eksene Göre Dönmesi

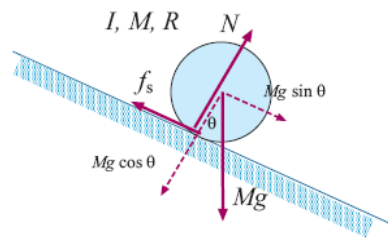
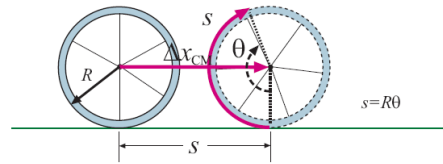


TOBB Ekonomi ve Teknoloji Üniversitesi

Fizik 101



- Yuvarlanma hareketi, dönme ekseninin uzayda sabit olmadığı dönme hareketidir.
- Eğer cismin üzerine etki eden dış torklar yoksa, katı bir cismin açısal momentumu her zaman korunur.
- Doğrusal momentumun korunumu yasası gibi, açısal momentumun korunum yasası da relativistik (görelî) ve kuantum mekaniksel sistemlerde aynı derecede geçerli olan temel bir fizik yasasıdır.



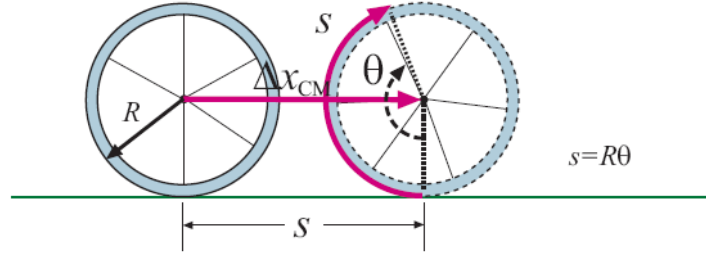
TOBB Ekonomi ve Teknoloji Üniversitesi

Fizik 101



Katı Cismin Yuvarlanma Hareketi

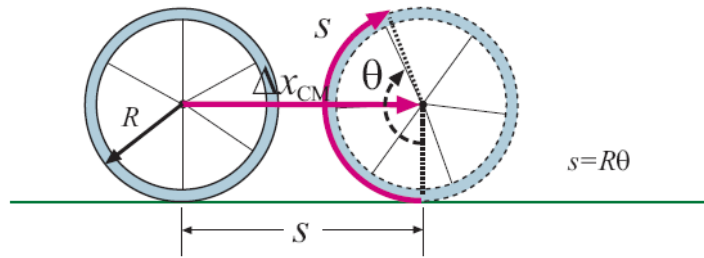
- Hareketli bir eksen etrafında dönen silindir, küre, halka gibi yüksek simetrikli katı bir cismin hareketli bir eksen etrafında dönme hareketini inceleyelim;



- Cismin düzgün bir yüzey üzerinde kaymadan yuvarlanma, yani saf yuvarlanma hareketi yaptığını düşünelim



Katı Cismin Yuvarlanma Hareketi



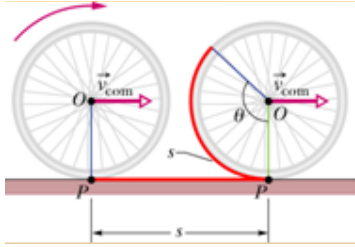
$$\Delta x_{CM} = s = R\theta \quad v_{CM} = \frac{dx_{CM}}{dt}$$



$$a_{CM} = R\alpha \quad v_{CM} = R\omega$$



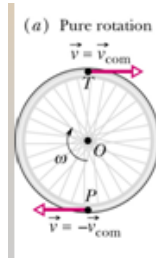
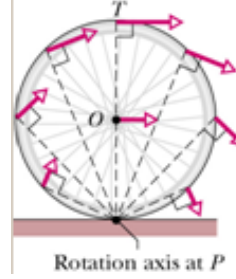
Katı Cismin Yuvarlanma Hareketi



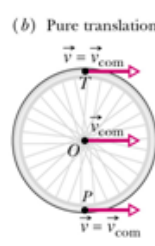
Saf Dönme Hareketi

$$v_{\text{com}} = \omega R$$

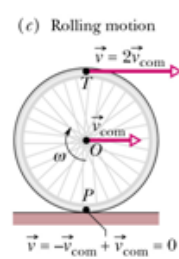
Dönme + Ötelenme Hareketi



+



=



TOBB Ekonomi ve Teknoloji Üniversitesi

Fizik 101



Katı Cismin Yuvarlanma Hareketi

$$K = \frac{1}{2} I_P \omega^2$$

$$I_P = I_{\text{com}} + MR^2$$

$$K = \frac{1}{2} I_{\text{com}} \omega^2 + \frac{1}{2} MR^2 \omega^2$$

$$v_{\text{com}} = \omega R$$

$$K = \frac{1}{2} I_{\text{com}} \omega^2 + \frac{1}{2} M v_{\text{com}}^2$$

Kinetik Enerji

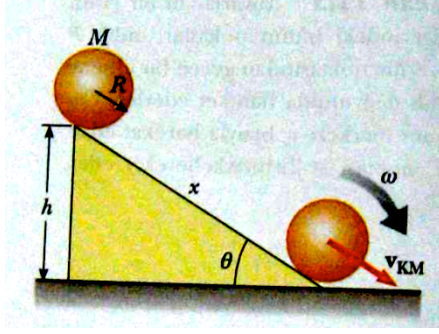
Yuvarlanan bir cisim iki tip kinetik enerjiye sahiptir:
Bir eksen etrafında dönme kinetik enerjisi ve kütle merkezinin ötelenmesinden kaynaklanan kinetik enerji.

TOBB Ekonomi ve Teknoloji Üniversitesi

Fizik 101



Eğik Düzlemde Yuvarlanan Küre



$$v_{KM} = R\omega$$

$$K = \frac{1}{2}I_{KM}\left(\frac{v_{KM}}{R}\right)^2 + \frac{1}{2}Mv_{KM}^2$$

$$K = \frac{1}{2}\left(\frac{I_{KM}}{R^2} + M\right)v_{KM}^2$$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{I_{KM}}{R^2} + M\right)v_{KM}^2 = Mgh$$

$$v_{KM} = \left(\frac{2gh}{1 + I_{KM}/MR^2}\right)^{1/2}$$



Eğik Düzlemde Yuvarlanan Küre

Küre eğik düzlemin tepesinde $U=Mgh$ potansiyel enerjisi ve $K=0$ kinetik enerjisi ile hareket etmeye başlar.

Düzensiz bir katı küre için eylemsizlik momenti; $I = \frac{2}{5}MR^2$

$$\Rightarrow v_{KM} = \left(\frac{2gh}{1 + \frac{2/5MR^2}{MR^2}}\right)^{1/2} = \left(\frac{10}{7}gh\right)^{1/2}$$

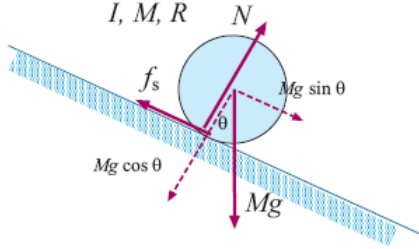
Eğik düzlem doğrultusundaki x yerdeğiştirme $h=x\sin\theta$ ile bağlantılıdır.

$$\Rightarrow v_{KM}^2 = \frac{10}{7}gx\sin\theta$$

$v_{KM}^2 = 2a_{KM}x$ olduğunu bildiğimize göre $a_{KM} = \frac{5}{7}g\sin\theta$ bulunur.



Eğik Düzlemde Yuvarlanan Küre



$$Mg \sin \theta - f_s = Ma_{CM}$$

$$\tau = Rf_s \sin 90^\circ = Rf_s$$

$$\tau = Rf_s = I\alpha$$

$$a_{CM} = r\alpha \implies \alpha = \frac{a_{CM}}{R}$$

$$Rf_s = \frac{Ia_{CM}}{R} \implies f_s = \frac{Ia_{CM}}{R^2}$$

$$Mg \sin \theta - \frac{Ia_{CM}}{R^2} = Ma_{CM}$$

$$a_{CM} = \frac{g \sin \theta}{\left(1 + \frac{I}{MR^2}\right)}$$

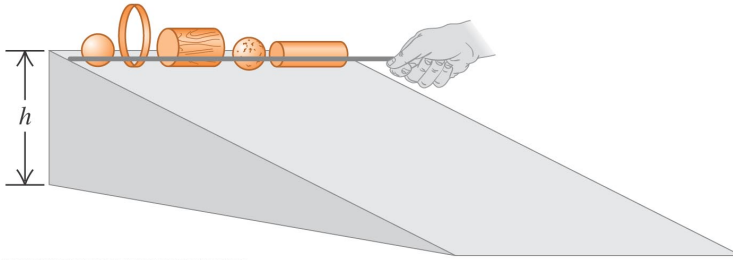
$$a_{KM} = \frac{5}{7} g \sin \theta$$

TOBB Ekonomi ve Teknoloji Üniversitesi

Fizik 101



Yuvarlanan katı cisimlerin yarışı



Eğik düzlemin tepesinden ilk hareketsiz olarak bırakılan farklı biçimdeki yuvarlak cisimlerin aşağı doğru yuvarlanmaları karşılaştırılmaktadır. Hangi cisim eğik düzlemin tabanına önce varır?

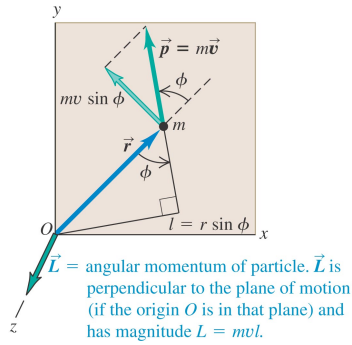
TOBB Ekonomi ve Teknoloji Üniversitesi

Fizik 101



Bir Parçacığın Açısal Momentumu

O koordinat başlangıcına göre, bir parçacığın L açısal momentumu, o andaki r konum vektörü ile p doğrusal momentumunun vektörel çarpımı olarak tanımlanır.



$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$$

$$|\vec{L}| = rp \sin \phi = mvr \sin \phi$$



Bir Parçacığın Açısal Momentumu

Doğrusal Hareket

$$\vec{p} = m\vec{v}$$



Dönme Hareketi

$$\vec{L} = I\vec{\omega}$$

$$\vec{F} = m\vec{a} = \frac{d\vec{p}}{dt}$$



$$\vec{\tau} = I\vec{\alpha} = \frac{d\vec{L}}{dt}$$

Bir parçacığa etki eden net tork, parçacığın açısal momentumunun zamana göre değişimine eşittir.



Parçacık Sisteminin Açısal Momentumu

Bir parçacıklar sisteminin verilen bir noktaya göre \vec{L} toplam açısal momentumu, parçacıkların her birine ait açısal momentumların vektörel toplamı olarak tanımlanır:

$$\vec{L} = \vec{L}_1 + \vec{L}_2 + \dots + \vec{L}_n = \sum_i \vec{L}_i$$

Eylemsiz bir referans sisteminde, verilen bir orijine göre sistemin toplam açısal momentumunun zamana göre değişimi, o orijine göre sistem üzerine etli eden net dış torka eşittir.

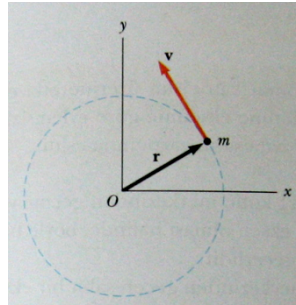
$$\sum \tau_{\text{dış}} = \sum_i \frac{d\vec{L}_i}{dt} = \sum_i \vec{L}_i = \frac{d\vec{L}}{dt}$$



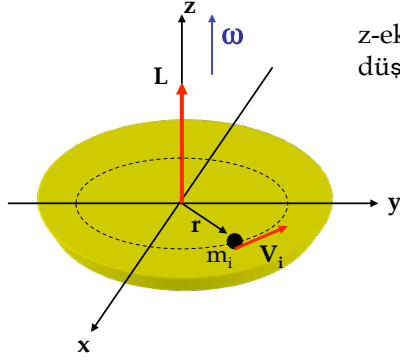
Örnek

Dairesel Hareket

Bir parçacık şekilde görüldüğü gibi xy-düzleminde r yarıçaplı bir çember üzerinde hareket etmektedir. a) Doğrusal hızı V olduğunda, O noktasına göre, cismin açısal momentumunun büyüklüğünü ve doğrultusunu bulunuz, b) L'nin büyüklüğünü ve doğrultusunu parçacığın açısal hızı cinsinden bulunuz.



Dönen Katı Bir Cismin Açısal Momentumu



z-ekseni etrafında dönen katı bir cisim düşünelim;

$$L_i = m_i r_i^2 \omega$$

$$L_z = \left(\sum_i m_i r_i^2 \right) \omega$$

$$L_z = I \omega$$

$$\frac{dL_z}{dt} = I \frac{d\omega}{dt} = I \alpha$$

$$\sum \tau_{\text{dış}} = \frac{dL_z}{dt} = I \alpha$$

TOBB Ekonomi ve Teknoloji Üniversitesi

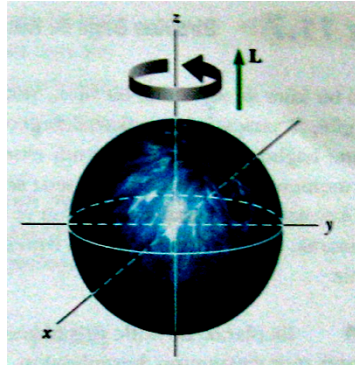
Fizik 101



Örnek

Bovling Topu

Şekilde görüldüğü gibi bir bovlng topu 10 devir/s'lik hızla döndüğüne göre açısal momentumunun büyüklüğünü bulunuz.



TOBB Ekonomi ve Teknoloji Üniversitesi

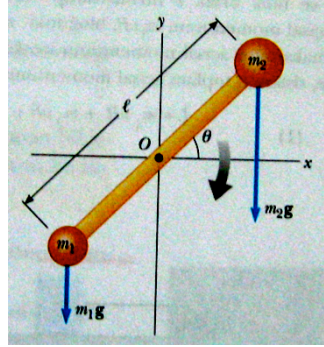
Fizik 101



Örnek

Dönen Çubuk

M kütleli l uzunluklu katı bir çubuk, merkezinden geçen sürtünmesiz bir mile tutturulmuştur. Bu çubuğun uçlarında m_1 ve m_2 kütleli iki parçacık bulunmaktadır. Sistem düşey bir düzlem içinde ω açısal hızıyla dönmektedir. a) Sistemin açısal momentumunun büyüklüğünü bulunuz, b) Çubuk yatayla θ açısı yaptığında, sistemin açısal ivmesinin büyüklüğünü bulunuz.



TOBB Ekonomi ve Teknoloji Üniversitesi

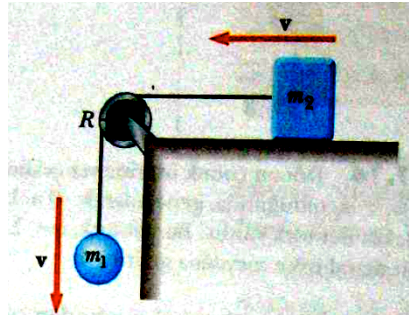
Fizik 101



Örnek

Birbirine bağlı iki kütle

m_1 kütleli bir kütle ile m_2 kütleli bir blok şeklinde görüldüğü gibi, R yarıçaplı bir makaradan geçen ince bir ipe birbirine bağlıdır. Makaranın, kendi eksenine göre eylemsizlik momenti I dır. Blok, sürtünmesiz yatay bir düzlem üzerinde kaymaktadır. Açısal momentum ve tork kavramlarını kullanarak, bu iki cismin doğrusal ivmesi için bir ifade elde ediniz.



TOBB Ekonomi ve Teknoloji Üniversitesi

Fizik 101



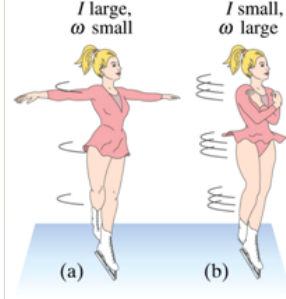
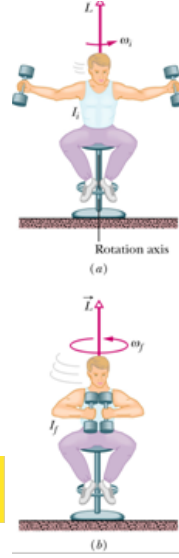
Açısal Momentumun Korunumu

Sabit bir eksen etrafında dönen katı bir cismin açısal momentumu;

$$L = I\omega$$

Eğer bir sisteme etki eden bileşke dış tork sıfırsa, sistemin toplam açısal momentumunun büyüklüğü ve doğrultusu sabittir.

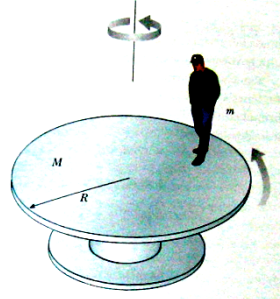
$$\vec{L} = \text{const.} \Rightarrow \vec{L}_i = \vec{L}_f$$



Örnek

Atlı Karınca

Dairesel disk şeklinde yatay bir tabla, sürtünmesiz, düşey bir mil etrafında yatay düzlemde dönmektedir. Tabla $M=100 \text{ kg}$ 'lık bir kütleyle ve $R=2 \text{ m}$ lik yarıçapa sahiptir. $m=60 \text{ kg}$ kütleli bir öğrenci, dönen tablanın kenarından merkezine doğru yavaşça yürümektedir. Öğrenci, dönen tablanın kenarındayken sistemin açısal hızı 2 rad/s ise, öğrencinin merkezden $r=0,5 \text{ m}$ uzaklıktaki bir noktaya ulaştığındaki açısal hızı ne olur?



Örnek

Dönen Bisiklet Tekerleği

Bir taburede oturan bir öğrenci dönen bisiklet tekerleğini milinden tutmaktadır. Başlangıçta öğrenci ve tabure hareketsiz olduğu halde, tekerlek, yukarıya doğru yönelmiş bir L_i başlangıç açısal momentumuyla dönmektedir. Tekerlek, kendi merkezi etrafında alt üst denilecek şekilde 180° döndürölürse, öğrenci ve tabure dönmeye başlar. L_i cinsinden, öğrenci ve tabureden oluşan sistemin L Açısal momentumunun büyüklüğü ve doğrultusunu bulunuz.



TOBB Ekonomi ve Teknoloji Üniversitesi

Fizik 101



Örnek

500 gr'lık bir kuş 9.25 m/s yatay olarak dikkatsizce uçmaktadır. Bir çubuğa tepesinden 25 cm aşağıda çarpıyor. Düzgün çubuk 0.75 m uzunluğunda 1.50 kg ağırlığında ve tabanından menteşelidir. Çarpışma kuşu sersemletiyor ve yere düşüyor (kısa zamanda toparlayıp tekrar uçmaya başlıyor)

- Kuşun çarpışmadan hemen sonra
- Kuş yere ulaştığında çubuğun sürati ne olur?

TOBB Ekonomi ve Teknoloji Üniversitesi

Fizik 101

